4 YAKINSAKLIK

4.1 Dizilerin Yakınsaklığı

Tanım: (X,τ) topolojik uzay ve $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, X'de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin bir x noktasına yakınsaması, x'in her U_x komşuluğu için öyle bir $N\in\mathbb{N}$ sayısının bulunmasıdır ki $n>N$ için $\{x_n\}\subset U_x$ olmasıdır.

Örnekler: 1) (X,τ) aşikar topolojik uzayında, her dizi yakınsaktır. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ X'de herhangibir dizi olsun. Keyfi x noktasının komşuluğu X ve $\{x_n\}\subset X$ olduğundan $\{x_n\}$, X'in her noktasına yakınsar.

2) (X,τ) diskrit topolojik uzayında yakınsak diziler yalnızca sabit dizilerdir.

3) $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b\}\}$ olmak üzere (X,τ) topolojik uzayında

$$x_n=\begin{cases} a, & n=2k-1 \\ c, & n=2k \end{cases}\quad k=1,2,\ldots \quad \text{ve}\quad y_n=\begin{cases} a, & n=2k-1 \\ b, & n=2k \end{cases}\quad k=1,2,\ldots$$

dizileri veriliyor. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin yakınsaklığını inceleyiniz.

a noktasının komşulukları $\{a\}$, $\{a,b\}$ ve X dir.

$\{a,c\}\not\subset\{a\}$ olduğundan $\{x_n\}$, a'ya yakınsamaz.

$\{a,b\}\not\subset\{a\}$ " $\{y_n\}$, " "

b noktasının komşulukları $\{a,b\}$ ve X dir.

$\{a,c\}\not\subset\{a,b\}$ olduğundan $\{x_n\}$, b'ye yakınsamaz.

$\{a,b\}\subset\{a,b\}$ ve $\{a,b\}\subset X$ olduğundan $\{y_n\}$, b'ye yakınsar.

c noktasının tek komşuluğu X dir.

$\{a,c\}\subset X$ olduğundan $\{x_n\}$, c'ye yakınsar.

$\{a,b\}\subset X$ " $\{y_n\}$, c'ye " .

Sonuç olarak, $\{x_n\}$ c noktasına $(x_n\to c)$ ve $\{y_n\}$, b ve c noktalarına $(y_n\to\{b,c\})$ yakınsar.

4) 17.11.2003 (Vize Sınavı) Soru4: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini göstersin.

a) (13 puan) $\tau=\{\emptyset,\mathbb{R}\}$ olmak üzere $(\mathbb{R},\tau)$'da $x_n=(-1)^n$ dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

b) (12 puan) $\tau=2^{\mathbb{R}}$ olmak üzere $(\mathbb{R},\tau)$'da $x_n=\frac{1}{n}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: a) $(\mathbb{R},\tau)$ aşikar topoloji olarak verilmiştir. Keyfi $a\in\mathbb{R}$ için alınan komşuluğu $\mathbb{R}$ dir. Buna göre $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ olduğundan $x_n=(-1)^n$ dizisi $\mathbb{R}$'nin keyfi elemanına yakınsar.

b) $(\mathbb{R},\tau)$ diskrit topoloji olarak verilmiştir. Dolayısıyla $\mathbb{R}$'deki bir elemanlı kümeler açıktır. $\mathbb{R}$'nin keyfi a noktası için a'nın komşuluğu $\{a\}$ alınırsa $n\geq N$ olmak üzere $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\{a\}$ olacak şekilde bir $N\in\mathbb{N}$ $(n>N)$ sayısı bulunamayacağından $x_n=\frac{1}{n}$ dizisi yakınsak değildir.

5) 22.04.2015 (Vize Sınavı II) Soru 3: b) (8 puan) $X=\{a,b,c,d\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{c\},\{d\},\{c,d\}\}$ ve $x_n=\begin{cases} c; & n \text{ tek} \\ d; & n \text{ çift}\end{cases}$ ise x_n dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: a ve b noktalarının komşuluğu X dir. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $x_n=\{c,d\}\subset X$ olduğundan $x_n\to\{a,b\}$ dir.

c'nin bir komşuluğu $\{c\}$ ve $\forall n$ için $\{x_n\}\not\subset\{c\}$

d'nin " " $\{d\}$ ve $\forall n$ için $\{x_n\}\not\subset\{d\}$ olduğundan x_n, c ve d'ye yakınsamaz. Sonuç olarak $x_n\to\{a,b\}$ dir.

Dizilerin Yetersizliği

Topolojik uzaylarda dizilerin yakınsaklığının tanımı kusursuzdur. Fakat metrik uzaylarda diziler için kullandığımız sonuçların benzerini topolojik uzaylarda kullandığımızda sorunlar ortaya çıkıyor. Örneğin, metrik uzaylarda bir kümenin kapalı olması için gerek ve yeter şartın X'de yakınsayan A'daki her dizinin limitinin A'da olması gerektiğini söyledik. Veya, x, A'nın kapanışı $\bar{A}$ da ise A'da x'e yakınsayan bir dizi vardır. Bu gibi teoremler, topolojik uzaylarda doğru değildir.

Örnek: X sayılamaz bir küme ve τ topolojisi, bütünleyenleri sayılabilir ve $\emptyset$'yi içeren kümeler ailesi olsun. (X,τ) topolojik uzayında bir $x_0\in X$ noktasını alalım. $X-\{x_0\}$ kapalı bir küme değildir. Dolayısıyla $\overline{X-\{x_0\}}=X$ dir. $\{x_n\}$ dizisi, $X-\{x_0\}$'da bir dizi olsun. $U=X-\{x_1,x_2,\dots\}$ açık bir kümedir ve x_0'ın bir komşuluğudur. Her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n\notin U$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi x_0'a yakınsamaz.

Bu örnekte görüldüğü gibi $x_0\in\bar{A}=\overline{X-\{x_0\}}=X$ ve x_0'a yakınsayan A'da bir dizi yok.

Topolojik uzaylarda, dizilerin yetersiz olduğuna bir örnek daha verelim.

Örnek: X sayılamaz bir küme olsun. X üzerinde iki topoloji, $\tau_1 = 2^X$ ve $\tau_2 = \{A \in 2^X \mid A^c = X-A \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$ olsun. Tabi ki $\tau_1 \neq \tau_2$ dir. ($\forall x \in X$ için $\{x\} \in \tau_1$, fakat $\{x\} \notin \tau_2$.) Şimdi $x_0 \in X$ ve X'de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini alalım. (X,τ_1)'de $x_n \to x_0 \Leftrightarrow \forall U_{x_0} \in \tau_1$, $x_0 \in U_{x_0}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $n > N$, $\{x_n\} \subset U_{x_0}$. Bu topolojide $\{x_0\} = U_{x_0}$, x_0'ın bir komşuluğu olduğundan $\exists N \in \mathbb{N}$, $n>N$, $\{x_n\} \subset \{x_0\}$ yani $x_n = x_0$ olmalıdır. Buna göre $x_n \to x_0 \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}$, $n>N$, $x_n \subset \{x_0\} \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}$, $x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots = x_n = \cdots = x_0$.

(X,τ_2)'de $x_n \to x_0 \Leftrightarrow \forall U_{x_0} \in \tau_2$, $x_0 \in U_{x_0}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $n>N$, $\{x_n\} \subset U_{x_0}$. Şimdi $F = \{x_n \mid x_n \neq x_0, n \in \mathbb{N}\}$ diyelim. F kümesinin sonlu olduğunu iddia ediyoruz. Değilse F sayılabilirdir. Buna göre, $U = F^c = X - F$ açık kümedir ve $x_0 \in U$ dur. Eğer $x_n \to x_0$ ise $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır ki $n>N$ için $\{x_n\} \subset U = X-F$ dir. Buna göre $F \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ dir. Bu ise F'nin sonsuz sayılabilir olması ile çelişkidir. Dolayısıyla $n>N$ için $x_n = x_0$ olmalı, yani $x_{N+1} = x_{N+2} = \cdots = x_n = \cdots = x_0$ dır.

Sonuç: (X,τ_1) ve (X,τ_2) farklı topolojik uzay olmalarına rağmen aynı yakınsak dizilere sahiptir. Bu yüzden, diziler topolojiyi karakterize edemez.

Gerçekten, topolojik uzaylarda diziler çok yetersizdir. Bu yüzden dizi kavramını daha genelleştirmeliyiz. Bunu, indeks kümesi $\mathbb{N}$'yi daha genel indeks kümelerine genelleyerek yapıyoruz.

Topolojik uzaylarda, dizilerdeki yakınsaklığın genellemesi olarak kullanılan netlerin (ağlar) ve filtrelerin (süzgeçler) yakınsaklığı birbiri ile ilişkilendirilebilir.

4.2 Netlerin Yakınsaklığı

Tanım: $(X,\mathcal{Z})$ topolojik uzay ve $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, X'de bir net olsun. $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netinin $x\in X$ noktasına yakınsaması demek x'in keyfi komşuluğu $U_x\in\mathcal{Z}$ için öyle $\alpha_0\in I$ olmasıdır ki $\alpha_0\leq\alpha$ şartını sağlayan her $\alpha\in I$ için $\{x_\alpha\}\subset U_x$ ($x_\alpha\in U_x$) olmasıdır. Bu durumda, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netinin limiti x denir ve $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = x$ veya $x_\alpha\to x$ ile gösterilir.

Tanım: $(X,\mathcal{Z})$ topolojik uzay ve $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, X'de bir net olsun. Bir $x\in X$ noktasının her U_x komşuluğu ve her $\alpha\in I$ için $\alpha\leq\beta$ ve $x_\beta\in U_x$ şartını sağlayan bir $\beta\in I$ varsa x noktasına, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netinin bir yığılma (accumulation, adherence, cluster) noktası denir.

Tanım: $(X,\mathcal{Z})$ topolojik uzayında $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ bir net ve $Y\subset X$ olsun.

a) Her $\alpha_0\in I$ için $\alpha_0\leq\alpha$ ve $x_\alpha\in Y$ şartlarını sağlayacak bir $\alpha\in I$ varsa $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netine Y'de eşsonlu (cofinally, frequently) denir.

b) $\alpha_0\leq\alpha$ şartını sağlayan her $\alpha\in I$ için $x_\alpha\in Y$ olacak şekilde bir $\alpha_0\in I$ varsa $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netine Y'de kalıntısal (eventually, ultimately, residually) denir.

Bu yeni tanıma göre yukarıdaki iki tanımı şöyle verebiliriz:

Tanım: $(X,\mathcal{Z})$ topolojik uzayında $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ bir net olsun.

a) x noktasının her U_x komşuluğunda, x_α eşsonlu ise x noktası, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netinin bir yığılma noktasıdır.

b) x noktasının her U_x komşuluğunda, x_α kalıntısal ise x noktası, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netinin bir limit noktasıdır.

Bir $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netine, en az bir limite sahipse yakınsak, hiç limit noktası yoksa ıraksak denir. Limit noktalarının kümesi, yığılma noktalarının kümesi tarafından kapsanır. (Yani $\lim\{x_\alpha\}\subset$ yığılma$\{x_\alpha\}$.)

Örnek: $(X,\mathcal{Z})$ herhangibir topolojik uzay ve $x_0\in X$ olsun. $B(x)$ ile $B(x)=\{U_x \mid U_x, x$'in bir komşuluğu$\}$ kümesini gösterelim. $B(x)$ ters kapsama bağıntısı ile bir yönlü kümedir. Herhangi seçim fonksiyonu $s: B(x)\to X$ bir nettir. $\{s_{U_x}\}_{U_x\in B(x)}$ neti x'e yakınsar. Gerçekten V, x'in herhangibir komşuluğu olsun. Her $U_x\in B(x)$ için $s_{U_x}\in U_x$ ve $V\leq U_x$'in anlamı $U_x\subset V$ olduğu için $V\leq U_x$ ise $s_{U_x}\in V$ dir.

Teorem: $x_\alpha \to x_0$ ise $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netinin her alt netide x_0'a yakınsar.

Kanıt: $x_\alpha \to x_0$ olduğundan x_0'ın her U_{x_0} komşuluğunda x_α kalıntısaldır. (Yani $\alpha_0 \leq \alpha$ şartını sağlayan her α için $x_\alpha \in U_x$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in I$ vardır.) $\{x_{\alpha_j}\}_{j\in J}$ $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$'nın herhangibir altneti olsun. Bu durumda $j_0 \leq j$ ise $\alpha_0 \leq k(j)$ olacak şekilde bir $j_0 \in J$ bulabiliriz. Buna göre $j_0 \leq j$ için $x_{\alpha_j} \in U_{x_0}$ dir. Yani $\{x_{\alpha_j}\}_{j\in J}$, U_{x_0}'da kalıntısaldır. Bunun anlamı, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netinin her altnetide x_0'a yakınsar. ■

Teorem: (X,τ) topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $x\in\overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart A'da x'e yakınsayan bir $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netinin olmasıdır.

Kanıt: $x\in\overline{A}$ olsun. x'in herhangi U_x komşuluğu için $U_x\cap A\neq\emptyset$ dir. x_{U_x}, $U_x\cap A$'da herhangibir nokta olsun. Ters kapsama bağıntısı ile $\{x_{U_x}\}_{U_x\in \mathcal{U}(x)}$, A'da bir nettir ve $x_{U_x}\to x$ dir. Gerçekten, V, x'in herhangibir komşuluğu olsun. Bu durumda, $V\leq U_x$ için (yani $V\supset U_x$ için) $x_{U_x}\in U_x\subset V$ dir. Buna göre bütün $V\leq U_x$ için $x_{U_x}\in V$, yani $x_{U_x}\to x$ dir.

Tersine, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, A'da x'e yakınsayan bir net olsun. Bu durumda, x'in herhangibir U_x komşuluğu için öyle bir $\alpha_0\in I$ vardır ki $\alpha_0\leq\alpha$ şartını sağlayan keyfi $\alpha\in I$ için $x_\alpha\in U_x$ dir. Buna göre $x_\alpha\in U_x\cap A$ ve böylece $U_x\cap A\neq\emptyset$ olduğu görülür, yani $x\in\overline{A}$ dır. ■

Teorem: (X,τ) topolojik uzay ve $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ bir net olsun. x noktasının $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netinin bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter şart $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ netinin x'e yakınsayan bir $\{x_{\alpha_k}\}_{k\in K}$ altnetinin olmasıdır.

Kanıt: Çalışma sorusu.

4.3 Filtrelerin Yakınsaklığı

Herhangibir filtre, aynı zamanda filtre baz olduğundan, kavramların bazılarını filtre baz için verelim.

Tanım: (X,τ) topolojik uzay ve $\mathbb{B}$, X üzerinde bir filtre baz olsun. Eğer $x \in \bigcap_{B\in\mathbb{B}} \overline{B}$ ise $x\in X$ noktasına $\mathbb{B}$'nin bir <u>yığılma noktası</u> denir.

Örnekler: 1) $(\mathbb{R},\tau)$ topolojik uzayında, x_n, $0, 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \cdots$ dizisi olsun. $S_n=\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ ve $\mathbb{B}=\{S_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ile tanımlayalım. $\mathbb{B}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir filtre bazdır. $\overline{S_n}=S_n\cup\{0\}$ olduğundan $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{S_n}=\{0\}$ dır. Bu yüzden, 0, $\mathbb{B}$ filtre bazının tek yığılma noktasıdır.

2) $(\mathbb{R},\tau)$ topolojik uzayında, $x_n=(-1)^n$, $S_n=\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$ ve $\mathbb{B}=\{S_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\overline{S_n}=\{-1,1\}$ olduğundan $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{S_n}=\{-1,1\}$ dir. $\mathbb{B}$'nin yığılma noktaları yalnız -1 ve 1 dir.

3) $(\mathbb{R},\tau)$ topolojik uzayında, $x_n=n$, $S_n=\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$ ve $\mathbb{B}=\{S_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ olsun. $\overline{S_n}=S_n$ ve $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{S_n}=\emptyset$ olduğundan $\mathbb{B}$'nin yığılma noktası yoktur.

4) $(\mathbb{R},\tau)$ topolojik uzayında, $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}=[0,1]\cap\mathbb{Q}$, $S_n=\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$ ve $\mathbb{B}=\{S_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ olsun. $\overline{S_n}=[0,1]$ ve $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{S_n}=[0,1]$ olduğundan $\mathbb{B}$'nin sayılamaz sayıda yığılma noktası vardır.

(X,τ) topolojik uzayında, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ bir net olsun. $S_\alpha=\{x_\beta \mid \beta\in I, \beta\geq\alpha\}$ ve $\mathbb{B}=\{S_\alpha \mid \alpha\in I\}$ olsun. $\mathbb{B}$, X üzerinde bir filtre bazdır. Açıktır ki $\mathbb{B}\to x \Leftrightarrow x_\alpha\to x$ dir.

Tersine $\mathbb{B}$, X üzerinde herhangibir filtre baz olsun. $\mathbb{B}$ üzerindeki sıralama ters kapsama bağıntısı (yani, $B_1\leq B_2 \Leftrightarrow B_2\subset B_1$) ile verilsin. Bu durumda $(\mathbb{B},\leq)$ yönlü bir kümedir. Her $B\in\mathbb{B}$ için x_B, B'de herhangibir nokta olsun. Bu durumda, $(x_B)_{B\in\mathbb{B}}$ bir nettir. (Buna $\mathbb{B}$ bazı ile üretilen net denir.)

Tanım: (X,τ) topolojik uzay ve $\mathbb{F}$, X üzerinde bir filtre olsun. $\mathbb{F}$ filtresinin <u>yığılma kümesi</u> yığılma $\mathbb{F}$ ile gösterilir ve

$$\text{yığılma}\,\mathbb{F}=\bigcap\{\overline{F} \mid F\in\mathbb{F}\}$$

kapalı kümesi ile tanımlanır. yığılma$\mathbb{F}$'nin elemanlarına $\mathbb{F}$ filtresinin <u>yığılma noktaları</u> denir.

yığılma $\mathbb{F}$ kümesi boş küme olabilir. x noktasının $\mathbb{F}$ filtresinin bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter şart her $F \in \mathbb{F}$ kümesi ve x'in her U_x komşuluğu için $F \cap U_x \neq \emptyset$ olmasıdır.

$\mathbb{B}$, $\mathbb{F}$ için bir filtre baz ise bu durumda $\mathbb{B} \subset \mathbb{F}$ olduğundan $\cap \overline{F} \subset \cap \overline{B}$ dir. Her F bir B kümesini içerdiğinden dolayı da $\cap \overline{B} \subset \cap \overline{F}$ dir. Bu yüzden!

Yardımcı Teorem: $\mathbb{B}$, $\mathbb{F}$ için bir filtre baz ise yığılma$\mathbb{F} = \cap \{\overline{B} \mid B \in \mathbb{B}\}$ dir.

Örnek: Bir $\{x_n\}$ dizisi tarafından üretilen elementer $\mathbb{F}$ filtresinin yığılma kümesini belirleyelim. $x \in$ yığılma$\mathbb{F}$ olması, tanımdan, x'in her U_x komşuluğunun her $S_n = \{x_k \mid k \geq n\}$ ile kesişmesi demektir. Bu ise her U_x komşuluğunun keyfi n için bazı x_k, $k \geq n$ elemanlarını içermesi demektir. Bu yüzden yığılma$\mathbb{F}$, $\{x_n\}$ dizisinin sonsuz elemanlarını içeren U_x komşuluğuna sahip x'lerden oluştuğunu gösterir. Bu tamamen dizilerdeki yığılma noktasının tanımıdır.

Tanım: (X, τ) topolojik uzayında, $\mathbb{B}$ bir filtre baz ve $x \in X$ olsun. x'in her U_x komşuluğu için $B \subset U_x$ olacak şekilde $B \in \mathbb{B}$ varsa $\mathbb{B}$, x'e <u>yakınsar</u> denir ve $\mathbb{B} \to x$ ile gösterilir.

Tanım: $\mathbb{F}$, (X, τ) topolojik uzayında, bir filtre baz olsun. x'in her U_x komşuluğu bir $F \in \mathbb{F}$ kümesini içeriyorsa $x \in X$ noktasına $\mathbb{F}$'nin bir <u>limit noktası</u> denir. Bütün limit noktalarının kümesine $\mathbb{F}$'nin <u>limiti</u> denir ve $\lim \mathbb{F}$ ile gösterilir. ($x \in \lim \mathbb{F}$ ise $\mathbb{F} \to x$ ile gösterilir.)

x'in $\mathbb{F}$'nin bir limit noktası olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{F}$'nin $B(x) = \{U_x \mid U_x, x\text{'in komşuluğu}\}$ komşuluk filtresinden daha kuvvetli olmasıdır. Açıktır ki, $\lim \mathbb{F} \subset$ yığılma$\mathbb{F}$ dir. (Hausdorff uzayında herhangibir $\mathbb{F}$ filtresinin limiti tekdir ve terside doğrudur.)

Yardımcı Teorem: Bir $\mathbb{B}$ filtre bazının limiti, $\mathbb{B}$ filtre bazı ile üretilen filtrenin limitine denktir.

Örnekler: (X, τ) topolojik uzayında $x \in X$ için $B(x) = \{U_x \mid U_x, x\text{'in komşuluğu}\}$ filtresi x'e yakınsar. $B(x) \to x$ dir.

2) $X = \mathbb{R}$ ve $\tau = \{A \in 2^{\mathbb{R}} \mid A^c = \mathbb{R} - A \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$ olsun. $\mathbb{B} = \{A \in 2^{\mathbb{R}} \mid A^c = \mathbb{R} - A, \text{ sayılabilir}\}$, X üzerinde bir filtre bazdır ve $\mathbb{B}$, her $x \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsar.

Gerçekten, herhangi $x \in \mathbb{R}$ alalım. $U_x \in \mathcal{B}(x) = \{U_x \mid U_x, x$'in bir komşuluğu$\}$ olsun. U_x, bir A açık kümesini içerdiğinden U_x^c sayılabilirdir. Bu yüzden, $U_x \in \mathbb{B}$ dir. Buna göre $\mathbb{B} \to x$ dir.

Teorem: $(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $a \in \bar{A}$ olması için gerek ve yeter şart A üzerinde $\mathbb{B} \to a$ olacak şekilde bir $\mathbb{B}$ filtre bazının olmasıdır.

Kanıt: $a \in \bar{A}$ olsun. Bu durumda a'nın herhangi U_a komşuluğu için $U_a \cap A \neq \emptyset$ dir. $\mathbb{B} = \{U_a \cap A \mid U_a, a$'nın komşuluğu$\}$ olsun. $\mathbb{B}$, A üzerinde bir filtre bazdır ve $\mathbb{B} \to a$ dır.

Tersine $\mathbb{B}$, A üzerinde, $\mathbb{B} \to a$ olacak şekilde bir $\mathbb{B}$ filtre bazı olsun. $a \notin \bar{A}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda a'nın öyle bir U_a komşuluğu vardır ki $U_a \cap A = \emptyset$ dir. $\mathbb{B} \to a$ olduğundan öyle bir $B \in \mathbb{B}$ vardır ki $B \subset U_a$ dır. $B \cap A = \emptyset$ olacaktır ki bu ise çelişkidir. $a \in \bar{A}$ olmalıdır. ■

Teorem: $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında, $x \in X$ noktasının $\mathbb{F}$ filtresinin bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter şart x'e yakınsayan $\mathbb{F}$'den daha kuvvetli bir filtrenin olmasıdır.

Kanıt: x, $\mathbb{F}$'nin yığılma noktası olsun. Bu durumda, her $F \in \mathbb{F}$ ve x'in her U_x komşuluğu için $U_x \cap F \neq \emptyset$ dir. $\{U_x \cap F\}$ ailesi X üzerinde bir filtredir. Bu filtre $\mathbb{F}$'den daha kuvvetli ve x'e yakınsar.

Tersine $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}$'den daha kuvvetli ve $x \in \lim \mathbb{F}_1$ olsun. $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}_1$ ve $\mathcal{B}(x) = \{U_x \mid U_x, x$'in komşuluğu$\} \leq \mathbb{F}_1$ olduğundan her $F \in \mathbb{F}$ ve her $U_x \in \mathcal{B}(x)$ için $F \cap U_x \in \mathbb{F}_1$ dir. Bu yüzden her U_x için $F \cap U_x \neq \emptyset$ dir. Yani, $x \in \bar{F}$ dır. F'nin keyfiliğinden $x \in$ yığılma$\mathbb{F}$ elde edilir. ■